Théorie de la relativité universelle

Rommel Nana Dutchou

Etudiant en Master Probabilités & Finance, Université de Paris VI, Paris.
ndrommel@yahoo.fr

La transformation de Lorentz, qui est indispensable dans la physique moderne, résulte de l'hypothèse d'invariance d'une vitesse. Une réinterpretation de cette hypothèse me permet de définir rigoureusement les notions d'observateur et de référentiel, et de décrire le groupe des transformations entres les systèmes de coordonnées possibles.

1 Introduction

1.1 Origine de la théorie : equations de Maxwell

Le but des calculs était de donner une nouvelle démonstration des équations de Maxwell à partir de la formule de Coulomb, sans supposer connue la force de Lorentz ni les formules expérimentales de l'électromagnétisme.
Je considère, en physique classique, les hypoyhèses suivantes

* La transformation de Lorentz : soit $(ct, \vec{r})$ l'intervalle d'espace-temps entre deux évènements dans un référentiel S et soit $(ct', \vec{r'})$ l'intervalle d'espace-temps correspondant dans un référentiel S' en translation uniforme de vitesse $\vec{v}$ dans S . Alors

$$\begin{aligned} \vec{r'} &= \vec{r} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}.\vec{r}}{\|v\|^2}\vec{v} - \gamma_v \frac{\vec{v}}{c}(ct) \\ ct' &= \gamma_v(ct - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c}) \\ \gamma_v &= \frac{1}{\sqrt{1-\|v\|^2}} \end{aligned}$$

* L'interaction électrostatique : Une charge q_1 au repos, situé à l'origine du repère d'espace, crée en tout point un champ électrique

$$\vec{E} = E(\vec{r}) = kq_1\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

  Une charge q_2 , en présence de ce champ, est soumise à la force $\vec{F} = q_2 E(\vec{r})$
* La définition relativiste de la force : Le vecteur force appliqué à un corps de masse au repos m et de vecteur vitesse $\vec{v}$ est

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\gamma_v m\vec{v})$$

(a) Invariant relativiste

$$\begin{aligned}
c^2t'^2 &= \gamma_v^2(ct - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^2 \\
&= \gamma_v^2c^2t^2 + \gamma_v^2\frac{(\vec{v}.\vec{r})^2}{c^2} - 2\gamma_v^2(\vec{v}.\vec{r})t \\
\|\vec{r'}\|^2 &= \vec{r'}.\vec{r'} \\
&= \|\vec{r} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}.\vec{r}}{\|v\|^2}\vec{v} - \gamma_v\vec{v}t\|^2 \\
&= \|\vec{r}\|^2 + (\gamma_v - 1)^2\frac{(\vec{v}.\vec{r})^2}{\|\vec{v}\|^2} + \gamma_v^2\|\vec{v}\|^2t^2 + 2(\gamma_v - 1)\frac{(\vec{v}.\vec{r})^2}{\|v\|^2} \\
&- 2\gamma_v(\vec{v}.\vec{r})t - 2\gamma_v(\gamma_v - 1)(\vec{v}.\vec{r})t \\
&= \|\vec{r}\|^2 + (\gamma_v - 1)^2\frac{(\vec{v}.\vec{r})^2}{\|v\|^2} + 2(\gamma_v - 1)\frac{(\vec{v}.\vec{r})^2}{\|v\|^2} + \gamma_v^2\|\vec{v}\|^2t^2 - 2\gamma_v^2(\vec{v}.\vec{r})t \\
&= \|\vec{r}\|^2 + (\gamma_v - 1)(\gamma_v + 1)\frac{(\vec{v}.\vec{r})^2}{\|v\|^2} + \gamma_v^2\|\vec{v}\|^2t^2 - 2\gamma_v^2(\vec{v}.\vec{r})t \\
&= \|\vec{r}\|^2 + \gamma_v^2\frac{(\vec{v}.\vec{r})^2}{c^2} + \gamma_v^2\|\vec{v}\|^2t^2 - 2\gamma_v^2(\vec{v}.\vec{r})t \\
c^2t'^2 - \|\vec{r'}\|^2 &= \gamma_v^2c^2t^2 - \gamma_v^2\|\vec{v}\|^2t^2 - \|\vec{r}\|^2 \\
&= c^2t^2 - \|\vec{r}\|^2
\end{aligned}$$

(b) Les champs associés à une charge dans un référentiel galiléen S se propagent à la vitesse c .
En effet, soit un photon rayonné par la charge en l'évènement de coordonnées $(0, \vec{0})$. Alors les coordonnées des évènements constituants ce photon sont de la forme $(f(\vec{r}), \vec{r})$. Dans un référentiel S' en translation uniforme par rapport à S , et dans lequel le photon a été rayonné en l'évènement de coordonnées $(0, \vec{0})$, les coordonnées des évènements constituant le photon sont de la forme $(g(\vec{r'}), \vec{r'})$. Du principe de covariance des lois de la physique, on peut déduire $f = g$ et on a l'invariant relativiste

$$f(\vec{r'})^2 - \|\vec{r'}\|^2 = f(\vec{r})^2 - \|\vec{r}\|^2 \tag{1.1}$$

S' étant quelconque, on peut, en faisant varier sa vitesse relative par rapport à S, considérer $\vec{r}$ et $\vec{r'}$ comme des variables indépendantes. Pour $\vec{r'} = \vec{0}$, on obtient

$$f(\vec{r}) = \pm\|\vec{r}\| + Constante$$

On a nécessairement $Constante = 0$ puisque le photon part de $(0, \vec{0})$ et $f(\vec{r})$ devant être positif, il vient

$$f(\vec{r}) = \|\vec{r}\|$$

Ainsi, dans la formulution de l'interaction électrostatique ci-dessus, on a

$$\vec{E} = E(\|\vec{r}\|, \vec{r})$$

Remarque 1.1.1. *Pour l'intervalle d'espace-temps $(\alpha, \vec{\beta})$ entre deux évènements de la trajectoire d'une particule, le module de sa vitesse moyenne entre ces évènements est $c \times \frac{\|\vec{\beta}\|}{\alpha}$*

Remarque 1.1.2. *La preuve précédente peut s'appliquer à toute particule libre. la covariance des lois de la physique signifie alors que toute particule libre de déplace à la vitesse c dans un référentiel galiléen ?*

(c) Les champs associés à une charge de mouvement uniforme dans un référentiel galiléen obéissent aux équations de Maxwell. En effet, je considère dans un référentiel galiléen S' une charge q_2 de vecteur vitesse instantané $\vec{w'}$ et en présence, en l'évènement A de coordonnées $(\|\vec{r'}\|, \vec{r'})$, du vecteur champ électrique

$$\vec{E'} = E'(\|\vec{r'}\|, \vec{r'}) = kq_1 \frac{\vec{r'}}{\|\vec{r'}\|^3} \tag{1.2}$$

Elle est alors soumise à la force $\vec{F'} = q_2\vec{E'}$. Dans un référentiel S par rapport auquel S' est en translation uniforme de vitesse $\vec{v}$, désignons par $(\|\vec{r}\|, \vec{r})$ les coordonnées de l'évènement A, par $\vec{w}$ le vecteur vitesse instantané de q_2 et par $\vec{F} = \vec{F}(\|\vec{r}\|, \vec{r})$ le vecteur force auquel est soumis q_2 en A.

Transformation du vecteur vitesse si $(ct, \vec{r})$ décrit les coordonnées de q_2 dans S, on déduit des formules de Lorentz

$$\frac{\vec{r'}}{t'} = \frac{\vec{r} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}.\vec{r}}{\|v\|^2}\vec{v} - \gamma_v\vec{v}t}{\gamma_v(t - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c^2})}$$

Des relations $\frac{\vec{r'}}{t'} = \vec{w'}$, $\frac{\vec{r}}{t} = \vec{w}$, il vient

$$\vec{w'} = \frac{\vec{w} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}.\vec{w}}{\|v\|^2}\vec{v} - \gamma_v\vec{v}}{\gamma_v(1 - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2})} \tag{1.3}$$

On peut en déduire les égalités

$$\begin{aligned}
(1 - \frac{\vec{w'}.\vec{w'}}{c^2}) &= \frac{\gamma_v^2(1 - \frac{\vec{v}\vec{w}}{c^2})^2 - \|\vec{w} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}.\vec{w}}{\|v\|^2}\vec{v} - \gamma_v\vec{v}\|^2}{\gamma_v^2(1 - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2})^2} \\
&= \frac{\gamma_v^2(1 - \frac{\vec{v}\vec{w}}{c^2})^2 - \frac{1}{c^2}\left(\|\vec{w}\|^2 + \gamma_v^2\frac{(\vec{v}.\vec{w})^2}{c^2} + \gamma_v^2\|\vec{v}\|^2 - 2\gamma_v^2(\vec{v}.\vec{w})\right)}{\gamma_v^2(1 - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2})^2} \\
&= \frac{\gamma_v^2 - \frac{\|\vec{w}\|^2}{c^2} - \gamma_v^2\frac{\|\vec{v}\|^2}{c^2}}{\gamma_v^2(1 - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2})^2} \\
1 - \frac{\|\vec{w'}\|^2}{c^2} &= \frac{1 - \frac{\|\vec{w}\|^2}{c^2}}{\gamma_v^2(1 - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2})^2}
\end{aligned}$$

$$\gamma_{w'} = \gamma_w\gamma_v(1 - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2}) \tag{1.4}$$

Transformation du vecteur force on a les égalités

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\gamma_w) &= \frac{d}{dt}\left(1-\frac{\|\vec{w}\|^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\
&= \frac{1}{c^2}(\vec{w}.\frac{d\vec{w}}{dt})\left(1-\frac{\|\vec{w}\|^2}{c^2}\right)^{-3/2} \\
\frac{d}{dt}(\gamma_w\vec{w}) &= \frac{1}{c^2}(\vec{w}.\frac{d\vec{w}}{dt})\vec{w}\left(1-\frac{\|\vec{w}\|^2}{c^2}\right)^{-3/2}+\frac{d\vec{w}}{dt}\left(1-\frac{\|\vec{w}\|^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\
&= \left((\vec{w}.\frac{d\vec{w}}{dt})\frac{\vec{w}}{c^2}+\frac{d\vec{w}}{dt}(1-\frac{\|\vec{w}\|^2}{c^2})\right)\left(1-\frac{\|\vec{w}\|^2}{c^2}\right)^{-3/2} \\
\vec{w}.\frac{d}{dt}(\gamma_w\vec{w}) &= (\vec{w}.\frac{d\vec{w}}{dt})\left(1-\frac{\|\vec{w}\|^2}{c^2}\right)^{-3/2} \\
&= c^2\frac{d}{dt}(\gamma_w) \\
\frac{\vec{w}.\vec{F}}{c} &= \frac{d}{dt}(mc\gamma_w)
\end{aligned}$$

si $(ct,\vec{r})$ décrit les coordonnées de q_2 dans S, alors

$$\begin{aligned}
\gamma_w\frac{d}{dt}(ct,\vec{r}) &= \gamma_w(c,\vec{w}) \\
\gamma_w\frac{d}{dt}(\gamma_w c,\gamma_w\vec{w}) &= \frac{1}{m}\gamma_w(\frac{\vec{w}.\vec{F}}{c},\vec{F})
\end{aligned}$$

m étant la masse au repos de q_2. Sachant que

$$\gamma_w\frac{d}{dt}=\gamma_{w'}\frac{d}{dt'}=\frac{d}{dt_0}$$

où dt_0 est la différentielle du temps propre du référentiel S^o en translation uniforme de vitesse $\vec{w}$ dans S, il résulte de la linéarité de la formule de Lorentz

$$\vec{r}=\vec{r'}+(\gamma_v-1)\frac{\vec{v}.\vec{r'}}{\|v\|^2}\vec{v}+\gamma_v\frac{\vec{v}}{c}(ct')$$

$$m\frac{d^2}{dt_o^2}\vec{r}=\left(m\frac{d^2}{dt_o^2}(\vec{r'})\right)+(\gamma_v-1)\frac{\vec{v}.}{\|v\|^2}\left(m\frac{d^2}{dt_o^2}(\vec{r'})\right)\vec{v}+\gamma_v\frac{\vec{v}}{c}\left(m\frac{d^2}{dt_o^2}(ct')\right)$$

$$\gamma_w\vec{F}=(\gamma_{w'}\vec{F'})+(\gamma_v-1)\frac{\vec{v}.(\gamma_{w'}\vec{F'})}{\|v\|^2}\vec{v}+\gamma_v\frac{\vec{v}}{c}(\gamma_{w'}\frac{\vec{w'}.\vec{F'}}{c})$$

$$\gamma_w\vec{F}=\gamma_{w'}\left(\vec{F'}+(\gamma_v-1)\frac{\vec{v}.\vec{F'}}{\|v\|^2}\vec{v}+\gamma_v\frac{\vec{w'}.\vec{F'}}{c^2}\vec{v}\right) \tag{1.5}$$

On déduit de 1.2

$$\vec{F'}(\|\vec{r'}\|,\vec{r'})=kq_1q_2\frac{\vec{r'}}{\|\vec{r'}\|^3}$$

On déduit de 1.5

$$\gamma_w\vec{F}(\|\vec{r}\|,\vec{r})=\gamma_{w'}\frac{kq_1q_2}{\|\vec{r'}\|^3}\left(\vec{r'}+(\gamma_v-1)\frac{\vec{v}.\vec{r'}}{\|v\|^2}\vec{v}+\gamma_v\frac{\vec{w'}.\vec{r'}}{c^2}\vec{v}\right) \tag{1.6}$$

Il résulte de Lorentz

$$\begin{aligned}
\vec{r'} &= \vec{r} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}.\vec{r}}{\|v\|^2}\vec{v} - \gamma_v \frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\| \\
\vec{v}.\vec{r'} &= \vec{v}.\vec{r} + (\gamma_v - 1)(\vec{v}.\vec{r}) - \gamma_v \frac{\|\vec{v}\|^2}{c}\|\vec{r}\| \\
\vec{v}.\vec{r'} &= \gamma_v(\vec{v}.\vec{r}) - \gamma_v \frac{\|\vec{v}\|^2}{c}\|\vec{r}\| \\
X = \vec{r'} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}.\vec{r'}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} &= \vec{r} + (\gamma_v - 1)(\gamma_v + 1)\frac{\vec{v}.\vec{r}}{\|v\|^2}\vec{v} - \gamma_v^2 \frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\| \\
&= \vec{r} + \gamma_v^2 \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c^2}\vec{v} - \gamma_v^2 \frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\| \\
X(1 - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2}) &= \vec{r} + \gamma_v^2 \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c^2}\vec{v} - \gamma_v^2 \frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2}\vec{r} \\
&- \gamma_v^2 \frac{(\vec{v}.\vec{r})(\vec{v}.\vec{w})}{c^4}\vec{v} + \gamma_v^2 \frac{(\vec{v}.\vec{w})}{c^2}\frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\|
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\vec{w'}.\vec{r'} = \left(\vec{r} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}.\vec{r}}{\|v\|^2}\vec{v} - \gamma_v \frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\|\right) . \left(\frac{\vec{w} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}.\vec{w}}{\|v\|^2}\vec{v} - \gamma_v \vec{v}}{\gamma_v(1 - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2})}\right)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_v(\vec{w'}.\vec{r'})(1 - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2}) &= (\vec{w}.\vec{r}) + (\gamma_v - 1)\frac{(\vec{v}.\vec{w})(\vec{v}.\vec{r})}{\|v\|^2} - \gamma_v(\vec{v}.\vec{r}) \\
&+ (\gamma_v - 1)\frac{(\vec{v}.\vec{r})(\vec{v}.\vec{w})}{\|v\|^2} + (\gamma_v - 1)^2\frac{(\vec{v}.\vec{r})(\vec{v}.\vec{w})}{\|v\|^2} \\
&- \gamma_v(\gamma_v - 1)(\vec{v}.\vec{r}) - \gamma_v \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c}\|\vec{r}\| - \gamma_v(\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}.\vec{w}}{c}\|\vec{r}\| \\
&+ \gamma_v^2 \frac{\|\vec{v}\|^2}{c}\|\vec{r}\| \\
\gamma_v(\vec{w'}.\vec{r'})(1 - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2}) &= (\vec{w}.\vec{r}) + (\gamma_v^2 - 1)\frac{(\vec{v}.\vec{w})(\vec{v}.\vec{r})}{\|v\|^2} - \gamma_v^2(\vec{v}.\vec{r}) \\
&- \gamma_v^2 \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c}\|\vec{r}\| + \gamma_v^2 \frac{\|\vec{v}\|^2}{c}\|\vec{r}\| \\
\gamma_v \frac{(\vec{w'}.\vec{r'})}{c^2}\vec{v}(1 - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2}) &= \frac{(\vec{w}.\vec{r})}{c^2}\vec{v} + \gamma_v^2 \frac{(\vec{v}.\vec{w})(\vec{v}.\vec{r})}{c^4}\vec{v} - \gamma_v^2 \frac{(\vec{v}.\vec{r})}{c^2}\vec{v} \\
&- \gamma_v^2 \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2}\frac{\vec{v}}{c}\|r\| + \gamma_v^2 \frac{\|\vec{v}\|^2}{c^2}\frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\| \\
(X + \gamma_v \frac{(\vec{w'}.\vec{r'})}{c^2}\vec{v})(1 - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2}) &= \vec{r} - \gamma_v^2 \frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2}\vec{r} \\
&+ \gamma_v^2 \frac{\|\vec{v}\|^2}{c^2}\frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\| + \frac{(\vec{w}.\vec{r})}{c^2}\vec{v} \\
&= \vec{r} - \frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\| + \left(\frac{(\vec{w}.\vec{r})}{c^2}\vec{v} - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2}\vec{r}\right) \\
&= \vec{r} - \frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\| + \vec{w} * \frac{(\vec{v} * \vec{r})}{c^2}
\end{aligned}$$

$$X + \gamma_v \frac{(\vec{w'}.\vec{r'})}{c^2}\vec{v} = \frac{\vec{r} - \frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\| + \vec{w} * \frac{(\vec{v}*\vec{r})}{c^2}}{(1 - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2})}$$

On déduit de 1.6

$$\gamma_w \vec{F}(\|\vec{r}\|, \vec{r}) = \gamma_{w'} \frac{kq_1q_2}{\|\vec{r'}\|^3} \frac{\vec{r} - \frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\| + \vec{w} * \frac{\vec{v}*\vec{r}}{c^2}}{(1 - \frac{\vec{v}.\vec{w}}{c^2})}$$

Il résulte de 1.4

$$\vec{F}(\|\vec{r}\|, \vec{r}) = \gamma_v \frac{kq_1q_2}{\|\vec{r'}\|^3} (\vec{r} - \frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\| + \vec{w} * \frac{\vec{v} * \vec{r}}{c^2})$$

Il résulte de Lorentz

$$\|\vec{r'}\| = \gamma_v(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c^2})$$

par conséquent,en posant

$$\vec{E} = kq_1\gamma_v^{-2} \frac{\vec{r} - \frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\|}{(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^3} \ , \ \vec{B} = \frac{kq_1}{c^2}\gamma_v^{-2} \frac{\vec{v} * \vec{r}}{(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^3} \tag{1.7}$$

Il vient

$$\vec{F} = q_2(\vec{E} + \vec{w} * \vec{B}) \tag{1.8}$$

Par définition, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont les vecteur champs électrique et magnétique en $(\|\vec{r}\|, \vec{r})$, rayonnés par la charge q_1 lorsqu'elle est en $(0, \vec{0})$.

Dans un référentiel galiléen, les vecteurs champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en l'évènement de de coordonnées $(ct + \|\vec{r}\|, \vec{l} + \vec{r})$, rayonné par une charge q lorsqu'elle est en $(ct, \vec{l})$ et dont le mouvement est uniforme de vitesse $\vec{v}$, sont donnés par

$$\vec{E}(ct + \|\vec{r}\|, \vec{l} + \vec{r}) = kq\gamma_v^{-2} \frac{\vec{r} - \frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\|}{(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^3} \ , \ \vec{B}(ct + \|\vec{r}\|, \vec{l} + \vec{r}) = \frac{kq}{c^2}\gamma_v^{-2} \frac{\vec{v} * \vec{r}}{(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^3}$$

Plaçons nous en un évènement de coordonnées $(c\mathrm{T}, \vec{\mathrm{L}})$ pour y écrire les relations entre les dérivées partielles des vecteurs champs. Alors si $\vec{f}$ désigne $\vec{E}$ ou $\vec{B}$, on a

$$f(ct + \|\vec{r}\|, \vec{l} + \vec{r}) = f(c\mathrm{T}, \vec{\mathrm{L}}) \ , \frac{d\vec{\mathrm{L}}}{dt} = \vec{0}$$

Les vecteurs étant exprimés dans un repère orthonormé d'espace $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, En notant $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{\mathrm{L}} = \mathrm{X}\vec{i} + \mathrm{Y}\vec{j} + \mathrm{Z}\vec{k}$, Il vient

$$c d\mathrm{T} = cdt + \frac{\vec{r}.d\vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \ d\vec{\mathrm{L}} = d\vec{l} + d\vec{r}$$

Sachant que $d\vec{l} = \vec{v}dt$, on a

$$c d\mathrm{T} = cdt + \frac{\vec{r}.(d\vec{\mathrm{L}} - \vec{v}dt)}{\|\vec{r}\|} = cdt + \frac{\vec{r}.d\vec{\mathrm{L}}}{\|\vec{r}\|} - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{\|\vec{r}\|}dt$$

$$c d\mathrm{T} = cdt + \frac{\vec{r}.(d\vec{\mathrm{L}} - \vec{v}dt)}{\|\vec{r}\|} = cdt(1 - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c\|\vec{r}\|}) + \frac{\vec{r}.d\vec{\mathrm{L}}}{\|\vec{r}\|}$$

$$cdt(\frac{\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c}}{\|\vec{r}\|}) = cd\mathrm{T} - \frac{\vec{r}.d\vec{\mathrm{L}}}{\|\vec{r}\|}$$

$$dt = \|\vec{r}\|\ \eta\ d\mathrm{T} - \frac{\vec{r}.d\vec{\mathrm{L}}}{c}\ \eta\ \ ,\ \eta = \left(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c}\right)^{-1}$$

formellement, si $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, on peut noter

$$f = f(\mathrm{T},\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) = g(\mathrm{X} - v_xt, \mathrm{Y} - v_yt, \mathrm{Z} - v_zt) = g(x,y,z)$$

Il résulte

$$df = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz$$

$$df = \frac{\partial g}{\partial x}(d\mathrm{X} - v_xdt) + \frac{\partial g}{\partial y}(d\mathrm{Y} - v_ydt) + \frac{\partial g}{\partial z}(d\mathrm{Z} - v_zdt)$$

$$df = \frac{\partial g}{\partial x}d\mathrm{X} + \frac{\partial g}{\partial y}d\mathrm{Y} + \frac{\partial g}{\partial z}d\mathrm{Z} + \frac{dg}{dt}dt$$

$$df = \frac{\partial g}{\partial x}d\mathrm{X} + \frac{\partial g}{\partial y}d\mathrm{Y} + \frac{\partial g}{\partial z}d\mathrm{Z} + \frac{dg}{dt}(\|\vec{r}\|\ \eta\ d\mathrm{T} - \frac{\vec{r}.d\vec{\mathrm{L}}}{c}\ \eta)$$

De la relation

$$\vec{r}.d\vec{\mathrm{L}} = xd\mathrm{X} + yd\mathrm{Y} + zd\mathrm{Z}$$

il vient

$$df = (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{x}{c}\eta\frac{dg}{dt})d\mathrm{X} + (\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{y}{c}\eta\frac{dg}{dt})d\mathrm{Y} + (\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{z}{c}\eta\frac{dg}{dt})d\mathrm{Z} + \frac{dg}{dt}\|\vec{r}\|\ \eta\ d\mathrm{T}$$

Il résulte

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{T}} = \|\vec{r}\|(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-1}\frac{dg}{dt}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}} = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{x}{c}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-1}\frac{dg}{dt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{Y}} = \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{y}{c}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-1}\frac{dg}{dt}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Z}} = \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{z}{c}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-1}\frac{dg}{dt}$$

On peut alors, par un calcul direct, établir les équations que vérifie $(\vec{E},\vec{B})$.
On peut également remarquer qu'en posant

$$\begin{aligned}
\vec{A}(ct + \|\vec{r}\|, \vec{l} + \vec{r}) &= \frac{kq}{c}\gamma_v^{-2}\frac{\vec{r}}{(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^2} \\
V(ct + \|\vec{r}\|, \vec{l} + \vec{r}) &= kq\gamma_v^{-2}\frac{\|\vec{r}\|}{(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^2} \\
W(ct + \|\vec{r}\|, \vec{l} + \vec{r}) &= -\frac{kq}{c}\gamma_v^{-2}\frac{1}{(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^2}
\end{aligned}$$

il vient

$$d\|\vec{r}\| = \frac{\vec{r}.d\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\ ,\ \frac{\partial\|\vec{r}\|}{\partial x} = \frac{x}{\|\vec{r}\|}\ ,\ \frac{\partial\|\vec{r}\|}{\partial t} = -\frac{\vec{v}.\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

On a alors,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = kq\gamma_v^{-2}\left(\frac{\partial\|\vec{r}\|}{\partial x}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-2} - 2\|\vec{r}\|(\frac{\partial\|\vec{r}\|}{\partial x} - \frac{v_x}{c})(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-3}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = kq\gamma_v^{-2}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-3}\left(\frac{x}{\|\vec{r}\|}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c}) - 2(x - \|\vec{r}\|\frac{v_x}{c})\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = kq\gamma_v^{-2}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-3}\left(-x - \frac{x}{\|\vec{r}\|}\frac{\vec{v}.\vec{r}}{c} + 2\|\vec{r}\|\frac{v_x}{c}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = kq\gamma_v^{-2}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-4}\left(-x\|\vec{r}\| + \frac{x}{\|\vec{r}\|}\frac{(\vec{v}.\vec{r})^2}{c^2} + 2\|\vec{r}\|^2\frac{v_x}{c} - 2\|\vec{r}\|v_x\frac{\vec{v}.\vec{r}}{c^2}\right)$$

Par ailleurs,

$$\frac{dV}{dt} = kq\gamma_v^{-2}\left(\frac{\partial\|\vec{r}\|}{\partial t}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-2} - 2\|\vec{r}\|(\frac{\partial\|\vec{r}\|}{\partial t} + \frac{\|\vec{v}\|^2}{c})(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-3}\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = kq\gamma_v^{-2}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-3}\left(\frac{-\vec{v}.\vec{r}}{\|\vec{r}\|}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c}) - 2(-\vec{v}.\vec{r} + \|\vec{r}\|\frac{\|\vec{v}\|^2}{c})\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = kq\gamma_v^{-2}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-3}\left(\vec{v}.\vec{r} - 2\|\vec{r}\|\frac{\|\vec{v}\|^2}{c} + \frac{(\vec{v}.\vec{r})^2}{c\|\vec{r}\|})\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = kq\gamma_v^{-2}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-3}\left(\vec{v}.\vec{r} - 2\|\vec{r}\|\frac{\|\vec{v}\|^2}{c} + \frac{(\vec{v}.\vec{r})^2}{c\|\vec{r}\|})\right)$$

$$-\frac{x}{c}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-1}\frac{dV}{dt} = kq\gamma_v^{-2}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-4}\left(-x\frac{\vec{v}.\vec{r}}{c} + 2x\|\vec{r}\|\frac{\|\vec{v}\|^2}{c^2} - \frac{x}{\|\vec{r}\|}\frac{(\vec{v}.\vec{r})^2}{c^2})\right)$$

D'autre part,

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{kq}{c}\gamma_v^{-2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-2} - 2x(\frac{\partial\|\vec{r}\|}{\partial t} + \frac{\|\vec{v}\|^2}{c})(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-3}\right)$$

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{kq}{c}\gamma_v^{-2}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-3}\left(-v_x(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c}) - 2x(-\frac{\vec{v}.\vec{r}}{\|\vec{r}\|} + \frac{\|\vec{v}\|^2}{c})\right)$$

$$\|\vec{r}\|(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-1}\frac{dA_x}{dt} = \frac{kq}{c}\gamma_v^{-2}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-4}\left(-\|\vec{r}\|^2\frac{v_x}{c} + \|\vec{r}\|v_x\frac{\vec{v}.\vec{r}}{c^2} + 2x\frac{\vec{v}.\vec{r}}{c} - 2x\|\vec{r}\|\frac{\|\vec{v}\|^2}{c^2}\right)$$

Sachant que

$$\frac{\partial V}{\partial \mathrm{X}} = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{x}{c}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-1}\frac{dV}{dt},\ \frac{\partial A_x}{\partial \mathrm{T}} = \|\vec{r}\|(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-1}\frac{dA_x}{dt}$$

On obtient :

$$\frac{\partial V}{\partial \mathrm{X}} + \frac{\partial A_x}{\partial \mathrm{T}} = kq\gamma_v^{-2}(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^{-4}\left(-x\|\vec{r}\| + \|\vec{r}\|^2\frac{v_x}{c} - \|\vec{r}\|v_x\frac{\vec{v}.\vec{r}}{c^2} + x\frac{\vec{v}.\vec{r}}{c}\right)$$

D'où

$$-\frac{\partial V}{\partial \mathrm{X}} - \frac{\partial A_x}{\partial \mathrm{T}} = kq\gamma_v^{-2}\frac{x - \frac{v_x}{c}\|\vec{r}\|}{(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^3} = E_x$$

En reprenant le même calcul pour les composantes suivant $\vec{j}$ et $\vec{k}$, on obtient

$$-\frac{\partial V}{\partial \mathrm{Y}} - \frac{\partial A_y}{\partial \mathrm{T}} = kq\gamma_v^{-2}\frac{y - \frac{v_y}{c}\|\vec{r}\|}{(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^3} = E_y,\ -\frac{\partial V}{\partial \mathrm{Z}} - \frac{\partial A_z}{\partial \mathrm{T}} = kq\gamma_v^{-2}\frac{z - \frac{v_z}{c}\|\vec{r}\|}{(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^3} = E_z$$

On a alors

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial \mathrm{T}}$$

Par des calculs similaires, on obtient

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A}),\ \ \overrightarrow{rot}(\vec{B}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial \mathrm{T}} = \vec{0},\ div(\vec{E}) = 0,\ div(\vec{A}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial \mathrm{T}} = W$$

D'où les équations

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial \mathrm{T}} = \vec{0},\ \overrightarrow{rot}(\vec{B}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial \mathrm{T}} = \vec{0},\ div(\vec{E}) = 0,\ div(\vec{B}) = \vec{0}$$

Ce sont les équations de Maxwell dites en absence de source. Je les obtiens pour les champs associés à une charge en mouvement uniforme.

(d) Les champs associés à une charge de mouvement non uniforme dans un référentiel galiléen n'obéissent pas aux équations de Maxwell.
Supposons, comme approximation, que la position et la vitesse d'une particule suffisent à la décrire. Alors, pour l'étude de son rayonnement, le mouvement accéléré d'une charge peut être décomposé en un mouvement localement uniforme. Si $\vec{v}$ est le vecteur vitesse instantané de la charge, puisque $\|\vec{v}\| < c$, les évènements constituants les champs rayonnés par la charge à deux dates distinctes sont différents. Il résulte que les champs en $(c\mathrm{T}, \vec{\mathrm{L}}) = (ct + \|\vec{r}\|, \vec{l} + \vec{r})$, associés à la charge q de vecteur vitesse instantané $\vec{v}$ en $(ct, \vec{l})$ sont donnés par

$$\vec{E}(ct + \|\vec{r}\|, \vec{l} + \vec{r}) = kq\gamma_v^{-2}\frac{\vec{r} - \frac{\vec{v}}{c}\|\vec{r}\|}{(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^3}\ ,\ \vec{B}(ct + \|\vec{r}\|, \vec{l} + \vec{r}) = \frac{kq}{c^2}\gamma_v^{-2}\frac{\vec{v} * \vec{r}}{(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^3}$$

Les mêmes calculs donnent, sachant qu'on a plus nécessairement $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial \mathrm{T}}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A}),\ \ \overrightarrow{rot}(\vec{B}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial \mathrm{T}} = \vec{J},\ div(\vec{E}) = \rho,\ div(\vec{A}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial \mathrm{T}} = W$$

avec

$$\begin{aligned}
\rho(ct + \|\vec{r}\|, \vec{l} + \vec{r}) &= 2\frac{kq}{mc^2}\gamma_v^{-4}\frac{\|\vec{r}\|}{(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^4}\left(\gamma_v\frac{\vec{v}.\vec{F}}{c}\|\vec{r}\| - \gamma_v\vec{F}.\vec{r}\right)\\
\vec{J}(ct + \|\vec{r}\|, \vec{l} + \vec{r}) &= 2\frac{kq}{mc^3}\gamma_v^{-4}\frac{\|\vec{r}\|}{(\|\vec{r}\| - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})^4}\left(\gamma_v\frac{\vec{v}.\vec{F}}{c}\|\vec{r}\| - \gamma_v\vec{F}.\vec{r}\right)
\end{aligned}$$

où m est la masse au repos de la charge, et $(\gamma_v\frac{\vec{v}.\vec{F}}{c}, \gamma_v\vec{F})$ est le quadrivecteur force qui lui est appliqué en l'évènement $(ct, \vec{l})$.

. L'équation $div(\vec{E}) = 0$ par exemple, n'est pas satisfaite dans une région de l'espace où n'est présente aucune charge comme le dit Maxwell

. De l'expression de $(\rho, \vec{J})$ ci-dessus, sachant que le quadrivecteur force est apport extérieur au système (particule, champs) et quelconque, il résulte qu'il existe une relation entre les propriétés d'un champ électromagnétique dans l'espace, la charge et la masse de la particule source

Conclusion 1.1.1. *je me suis proposé de généraliser les calculs ci-dessus. Or la seule approximation faite est celle qui consiste à approcher un mouvement accéléré par un mouvement localement uniforme. Pour se défaire de cette hypothèse, il faudra généraliser les formules de Lorentz de sorte que la nouvelle transformation soit valable entre observateurs dont le mouvement relatifs est quelconque. Autrement dit il faudra considérer la relativité générale ? Je remarque alors que les équations de Maxwell que je remet en question, décrivent le champ électromagnétique dans un milieux quelconque et la vitesse de propagation de ce champ dépend du milieux ! Ayant démontré ci-dessus que le champ se propage à la vitesse c à l'aide de l'invariant relativiste, j'ai entrepris de généraliser cette équation sans imposer l'existence d'une métrique invariante.*

1.2 Généralisation de la transformation de Lorentz

1.2.1 modélisation

Soient deux référentiels S et S' tels que S' soit en mouvement uniforme de vitesse $\vec{v}$ par rapport à S. Désignons par $(ct, \vec{r})$ l'intervalle d'espace-temps entre deux évènements A et B dans S et par $(ct', \vec{r'})$ l'intervalle correspondant dans S'. Alors Lorentz donne

$$\begin{aligned} \vec{r'} &= \vec{r} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}.\vec{r}}{\|v\|^2}\vec{v} - \gamma_v \frac{\vec{v}}{c}(ct) \\ ct' &= \gamma_v(ct - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c}) \end{aligned}$$

En remarquant qu'un physicien définit à priori l'unité de longueur de façon arbitraire, il vient une généralisation possible de ces formules. En effet, si $\mu \in \mathbb{R}^*$, on peut interpreter la transformation suivante

$$\begin{aligned} \vec{r'} &= \mu\left(\vec{r} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}.\vec{r}}{\|v\|^2}\vec{v} - \gamma_v \frac{\vec{v}}{c}(ct)\right) \\ ct' &= \mu\left(\gamma_v(ct - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c})\right) \end{aligned}$$

Si $\mu > 0$, on dit que le physicien du référentiel S' a redéfinit l'unité de longueur. il a multiplié l'ancienne unité par la constante μ. Si $\mu < 0$, en plus de la redéfinition de sont unité de longueur, le physicien du référentiel S' a inverser sa convention de signe ce qui revient à inverser l'orientation des axes spatio-temporelles mais l'écoulement du temps reste unidirectionnel ! en effet, puisque le signe de

$$\frac{\partial t'}{\partial t}$$

reste constant(négatif dans ce cas), si on fait varier la composante temporelle ct dans un sens fixé à priori, la composante ct' varie dans un unique sens. on dit

que ct' est une fonction monotone de ct.
Désigons par $\mathcal{N}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ qui sont telles, si $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est un système de coordonnées spatio-temporelles pour un physicien donnée, qu'on puisse donner un sens au fait qu'il existe un physicien pour lequel $f(X) = X'$ soit un système de coordonnées. je donne ainsi une définition intuitive *mais fausse* de $\mathcal{N}$. Alors intuitivement, $\mathcal{N}$ est différent de l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$. En effet, $f = 0$ n'est évidement pas élément de $\mathcal{N}$.

Remarque 1.2.1. *L'introduction de l'ensemble $\mathcal{N}$ implique un traitement des dimensions spatiales et temporelle indépendamment de toute représentation géométrique. Il n'est par exemple plus question de repère (orthonormé ou non) d'espace. On démontrera, en développant la théorie, que ces dimensions coïncident avec les observations qu'un physicien ferait dans un repère orthonormé euclidien ! ce sera la preuve de l'existence, dans la nature, des systèmes de coordonnées d'axes orthogonales entre elles pour la norme euclidienne.*

Il est plus facile à ce niveau, au lieu de citer des applications qui n'appartiendraient pas à $\mathcal{N}$, de donner des exemples de ses éléments. En effet, l'application définie par $x'_i = x_i + \alpha_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ doit être élément de $\mathcal{N}$ car ceci traduit qu'il n'y a pas d'origine dans la nature. Par ailleurs, $x'_i = \alpha x_i$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ définie un élément de $\mathcal{N}$ car un physicien peut redéfinir l'unité de longueur ou modifier sa convention de signe. Il n'est pas souhaitable que $x'_i = \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^*$ soit élément de $\mathcal{N}$ car ceci implique une asymétrie entre les composantes du système de coordonnées. Moins intuitives mais plus habituelle, en notant $(ct, \vec{r}) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, les formules de Lorentz ci-dessus définissent un élément de $\mathcal{N}$ "**si**" on pose $\vec{v}.\vec{r} = v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4$ *ce qui correspond au produit scalaire euclidien dans un repère orthonormée d'espace.* Définissons $\mathcal{N}$.
Je suppose que la nature est un ensemble mathématique $\mathcal{U}$, équipotent à $\mathbb{R}^4$. Ses éléments sont appelés évènements. Ainsi, toute entité physique existente est un sous ensemble de $\mathcal{U}$. je considère un ensemble de physiciens, chacun dans un état éventuellement différent, qui essayent de décrire la nature. Pour identifier les évènements, chacun des physiciens se donne un système de coordonnées qu'on formalise par une bijection S définie sur $\mathcal{U}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^4$. De plus, intuitivement, chacun des physiciens a une notion de proximité entre les évènements qu'il formalise par une métrique. Si, dans un système de coordonnées qu'il a choisit, $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ désigne les coordonnées de trois évènements pour un physicien donné, une métrique choisie est une application $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}$, à laquelle on impose les conditions

$$\begin{aligned}
\varphi(x^{(1)}, x^{(2)}) &= 0 \;\Rightarrow\; x^{(1)} = x^{(1)} \\
\varphi(x^{(1)}, x^{(2)}) &= \varphi(x^{(2)}, x^{(1)}) \\
\varphi(x^{(1)}, x^{(3)}) &\leq \varphi(x^{(1)}, x^{(2)}) + \varphi(x^{(2)}, x^{(3)})
\end{aligned}$$

Si les deux premières relations (séparabilité et symétrie) sont intuitives, l'inégalité triangulaire l'est beaucoup moins. Il est souhaitable que cette notion de proximité soit une propriété intrinsèque de $\mathcal{U}$ (indépendante des physiciens) et il est alors remarquable qu'en mathématique, toutes les normes définies sur $\mathbb{R}^4$ sont équivalentes en ce sens qu'elles définissent la même topologie. En s'inspirant de ce résultat, on pose

. $\mathcal{U}$ est un espace topologique

. φ définie sur $\mathbb{R}^4$ sa topologie naturelle

. On appelle observateur tout homéomorphisme $S : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}^4$

S et S' étant deux observateurs, on a la relation

$$S' = (S'oS^{-1})oS$$

$(S'oS^{-1})$ est la transformation des coordonnées spatio-temporelles entre S et S'. A ce stade, du fait de la taille de l'ensemble des transformations, le modèle n'est visiblement pas réaliste. On peut remarquer qu'il n'est pas nécessaire de préciser la nature mathématique des éléments de $\mathcal{U}$ pour l'étude des transformations. Comment réduire la taille de l'ensemble des transformations ? Classiquement, avant la théorie de la relativité générale, l'étude des transformations des coordonnées spatio-temporelles est faites au cas par cas, suivant une liste préalablement établie des états relatifs possibles : translation uniforme, rotation uniforme, translation accélérée, ect. Dans chaque cas, la solution est donnée par un système $x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4), i \in \{1, 2, 3, 4\}$ où $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est un homéomorphisme. Je choisit une autre approche. Je considère que l'ensemble des transformations définit ci-dessus est redondant et qu'on peut, sans perte de généralité, le restreindre à certaines de ces parties. Pour illustrer ceci, imaginer que les observateurs sont en fait les physiciens de la planète qui se réunissent selon leurs langues maternelles. On peut supposer que les groupes ainsi formés sont identiques puisque les lois de la physique ne devraient pas dépendre de la langue dans laquelle elles s'expriment. Alors les états relatifs entre observateurs doivent être ceux entre des observateurs d'un même groupe et la comparaison de deux observateurs pris dans des groupes différents n'a aucun sens. En reprenant la modélisation qui nous intéresse, on peut supposer qu'il existe un critère permettant de regrouper les observateurs qui utilisent "les mêmes règles". On définit alors le critère suivant : *Deux observateurs appartiennent au même groupe s'ils sont d'accord sur "quelque chose"* et chaque groupe est appelé espace-temps. Il faut évidemment préciser "quelque chose" et on se souvient alors de la transformation de Lorentz, qui est construite avec l'hypothèse de l'invariance d'une vitesse. Je définit le critère suivant

. On dira d'une partie Λ de $\mathbb{R}^4$ qu'elle est nulle s'il existe trois fonctions réelles u_2, u_3, u_4, définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables, telles que

$$(\frac{du_2}{d\alpha})^2 + (\frac{du_3}{d\alpha})^2 + (\frac{du_4}{d\alpha})^2 = 1 \ , \ \Lambda = \{(\alpha, u_2(\alpha), u_3(\alpha), u_4(\alpha)), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

. On appelle noyau d'un observateur S l'image réciproque par S de l'ensemble des parties nulles de $\mathbb{R}^4$

. Deux observateurs S et S' appartiennent au même espace-temps s'ils ont le même noyau, et $S'oS^{-1}$ est infiniment différentiable.

Si deux observateurs S et S' appartiennent au même espace-temps, on dira par définition que $S'oS^{-1}$ est une transformation admissible et on note $\mathcal{N}$ l'ensemble de ces transformations. C'est également l'ensembles des états relatifs possibles entre observateurs.

1.2.2 Formalisme

Hypothèse 1. *La nature $\mathcal{U}$, est un espace topologique homéomorphe à $\mathbb{R}^4$*

Définition 1.2.1. *On appelle observateur tout homéomorphisme définit sur $\mathcal{U}$ à valeur dans $\mathbb{R}^4$. On note Θ l'ensemble des observateurs.*

On note Δ l'ensemble des parties nulles de $\mathbb{R}^4$.

Définition 1.2.2. *L'ensemble des transformations admissibles, noté $\mathcal{N}$, est définit par*

$$\mathcal{N} = \left\{ f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4 \ , bijective \ , \ \mathcal{C}^\infty \ , \ \forall \Lambda \in \Delta \ , \ f(\Lambda) \in \Delta \right\}$$

2 Groupe des transformations admissibles

Soit $f = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{N}$, $f_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons

$$\Lambda = \{(v(\zeta), u_2(v(\zeta)), u_3(v(\zeta)), u_4(v(\zeta))) \, , \zeta \in \mathbb{R}\}$$

Alors $\Lambda \in \Delta$ si et seulement si, $u_i = u_i(\alpha)$, $v = v(\zeta)$,

$$(\frac{d(u_2 o v)}{dv})^2 + (\frac{d(u_3 o v)}{dv})^2 + (\frac{d(u_4 o v)}{dv})^2 = 1$$

$$\frac{1}{(\frac{dv}{d\zeta})^2}(\frac{d(u_2 o v)}{d\zeta})^2 + (\frac{d(u_3 o v)}{d\zeta})^2 + (\frac{d(u_4 o v)}{d\zeta})^2 = 1$$

$$(\frac{du_2}{d\alpha})^2 + (\frac{du_3}{d\alpha})^2 + (\frac{du_4}{d\alpha})^2 = 1$$

Sous cette condition, on peut noter

$$f(\Lambda) = \{(v'(\zeta), u_2'(v'(\zeta)), u_3'(v'(\zeta)), u_4'(v'(\zeta))) \, , \zeta \in \mathbb{R}\}$$

On a les relations

$$\begin{aligned} \frac{dv'}{d\zeta} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{dv}{d\zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{du_2}{d\alpha}\frac{dv}{d\zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\frac{du_3}{d\alpha}\frac{dv}{d\zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial x_4}\frac{du_4}{d\alpha}\frac{dv}{d\zeta} \\ \frac{d(u_i' o v')}{d\zeta} &= \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{dv}{d\zeta} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\frac{du_2}{d\alpha}\frac{dv}{d\zeta} + \frac{\partial f_i}{\partial x_3}\frac{du_3}{d\alpha}\frac{dv}{d\zeta} + \frac{\partial f_i}{\partial x_4}\frac{du_4}{d\alpha}\frac{dv}{d\zeta} \end{aligned}$$

En notant F la matrice différentielle de f, on obtient

$$\begin{pmatrix} \frac{dv'}{d\zeta} \\ \frac{d(u_2' o v')}{d\zeta} \\ \frac{d(u_3' o v')}{d\zeta} \\ \frac{d(u_4' o v')}{d\zeta} \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \frac{dv}{d\zeta} \\ \frac{du_2}{d\alpha}\frac{dv}{d\zeta} \\ \frac{du_3}{d\alpha}\frac{dv}{d\zeta} \\ \frac{du_4}{d\alpha}\frac{v}{d\zeta} \end{pmatrix}$$

$$\frac{dv'}{d\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{du_2'}{d\alpha} \\ \frac{du_3'}{d\alpha} \\ \frac{du_4'}{d\alpha} \end{pmatrix} = F \frac{dv}{d\zeta} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{du_2}{d\alpha} \\ \frac{du_3}{d\alpha} \\ \frac{du_4}{d\alpha} \end{pmatrix}$$

Sachant que

$$(\frac{du_2'}{d\alpha})^2 + (\frac{du_3'}{d\alpha})^2 + (\frac{du_4'}{d\alpha})^2 = 1$$

on peut déduire, en choisissant v, u_2, u_3, u_4 affines par exemple, que F vérifie

$$\forall h \in \mathbb{R}^4, \left\{ h_1^2 - h_2^2 - h_3^2 - h_4^2 = 0 \right\} \Rightarrow \left\{ {h'}_1^2 - {h'}_2^2 - {h'}_3^2 - {h'}_4^2 = 0 \right\}, h' = Fh$$

2.1 Transformation du produit scalaire euclidien infinitésimal

Soit $f \in \mathcal{N}$ et soit F sa matrice différentielle. On pose $P(h) = h_1^2 - h_2^2 - h_3^2 - h_4^2$. Alors si $h' = Fh,\ f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, il vient

$$h'_i = \sum_{j=1}^{4} f_{ij} h_j$$

$$P(h') = (f_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{k1}^2)h_1^2 + \sum_{i=2}^{4}(f_{1i}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{ki}^2)h_i^2 + 2\sum_{i\neq j}(f_{1i}f_{1j} - \sum_{k=2}^{4} f_{ki}f_{kj})h_i h_j$$

$P(h)$ et $P(h')$ sont des polynômes de second degré par rapport à chacune des variables h_i et de la relation $P(h) = 0 \Rightarrow P(h') = 0$, on déduit qu'il existe une fonction réelle μ définie sur $\mathbb{R}^4$, non nulle en tout point, telle que

$$P(h') = \mu P(h) \tag{2.1}$$

Il en résulte les équations

$$f_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{k1}^2 = \mu,\ f_{1i}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{ki}^2 = -\mu\ \ (i \neq 1),\ f_{1i}f_{1j} - \sum_{k=2}^{4} f_{ki}f_{kj} = 0\ \ (i \neq j)$$

On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{4} f_{k1}^2 = -\mu + 2f_{11}^2,\ \ \sum_{k=1}^{4} f_{ki}^2 = \mu + 2f_{1i}^2\ \ (i \neq 1),\ \sum_{k=1}^{4} f_{ki}f_{kj} = 2f_{1i}f_{1j}\ \ (i \neq j)$$

On peut écrire

$$F^tF = \mu \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} f_{11}^2 & f_{11}f_{12} & f_{11}f_{13} & f_{11}f_{14} \\ f_{12}f_{11} & f_{12}^2 & f_{12}f_{13} & f_{12}f_{14} \\ f_{13}f_{11} & f_{13}f_{12} & f_{13}^2 & f_{13}f_{14} \\ f_{14}f_{11} & f_{14}f_{12} & f_{14}f_{13} & f_{14}^2 \end{pmatrix}$$

On note

$$F^tF = \mu J + 2(f_{1i}f_{1j})_{ij} \tag{2.2}$$

Remarque 2.1.1. *Si on note $x' = f(x), y' = f(y)$, alors $dx' = Fdx, dy' = Fdy$. Il vient $dx'^t dy' = (Fdx)^t(Fdy) = dx^t(F^tF)dy$. Or si $x \in \mathbb{R}^4, x^t x$ représente la norme euclidienne du vecteur x par conséquent la matrice F^tF ci dessus caractérise la transformation du produit scalaire euclidien infinitésimal*

Le calcul direct du déterminant d'une matrice donne, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, I_4 étant la matrice identité de $\mathbb{R}^4$,

$$det(F^tF - \lambda I_4) = (\mu - \lambda)^2 \left\{2(\mu - \lambda)f_{11}^2 - (\mu + \lambda)(2f_{12}^2 + 2f_{13}^2 + 2f_{14}^2 + \mu - \lambda)\right\} \tag{2.3}$$

Posons $p_i = \begin{pmatrix} f_{2i} \\ f_{3i} \\ f_{4i} \end{pmatrix}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^4$, le système de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x))$ est nécessairement lié par conséquent, il existe quatre fonctions réelles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ définies sur $\mathbb{R}^4$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^4,\ (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x), \alpha_4(x)) \neq (0,0,0,0),\ \sum_{i=1}^{4} \alpha_i(x) p_i(x) = 0$$

On peut alors écrire

$$p_j^t(\sum_{i=1}^{4}\alpha_i p_i) = \sum_{i=1}^{4}\alpha_i(p_j^t p_i) = 0$$

Le déterminant de la matrice $(p_j^t p_i)_{ij}$ est nécessairement nul. Sachant que 2.2 donne

$$p_1^t p_1 = f_{11}^2 - \mu,\ p_i^t p_i = f_{1i}^2 + \mu\ \ (i \neq 1),\ p_i^t p_j = f_{1i}f_{1j}\ \ (i \neq j)$$

On peut écrire

$$(p_j^t p_i)_{ij} = \begin{pmatrix} f_{11}^2-\mu & f_{11}f_{12} & f_{11}f_{13} & f_{12}f_{14} \\ f_{11}f_{12} & f_{12}^2+\mu & f_{13}f_{14} & f_{13}f_{14} \\ f_{11}f_{13} & f_{12}f_{13} & f_{13}^2+\mu & f_{13}f_{14} \\ f_{14}f_{11} & f_{14}f_{12} & f_{14}f_{13} & f_{14}^2+\mu \end{pmatrix}$$

Le calcul direct donne

$$det(p_j^t p_i)_{ij} = \mu^3\left\{f_{11}^2 - f_{12}^2 - f_{13}^2 - f_{14}^2 - \mu\right\}$$

On a donc l'égalité

$$\mu = f_{11}^2 - f_{12}^2 - f_{13}^2 - f_{14}^2 \tag{2.4}$$

cette relation permet de simplifier 2.3. Il vient alors

$$det(F^tF - \lambda I_4) = (\mu-\lambda)^2\left\{\lambda^2 + 2\lambda(\mu - 2f_{11}^2) + \mu^2\right\}$$

On peut en déduire les valeurs propres de F^tF

$$\lambda_1 = \mu,\ \lambda_2 = (2f_{11}^2-\mu) - 2|f_{11}|\sqrt{f_{11}^2-\mu},\ \lambda_3 = (2f_{11}^2-\mu) + 2|f_{11}|\sqrt{f_{11}^2-\mu}$$

$\varepsilon = \frac{f_{11}}{|f_{11}|}$ est bien défini. En effet, $\|.\|_2$ étant la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^4$, on a

$$\|F\vec{e}\|_2^2 = (F\vec{e})^t(F\vec{e}) = \vec{e}^t(F^tF)\vec{e} = \mu\|\vec{e}\|_2^2,\ \vec{e} \in V(\lambda_1)$$

Sachant, d'après 2.1 que μ est non nul en tout point, on déduit que $\mu > 0$. Il résulte alors de 2.4 et de la continuité des transformations que $f_{11}(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^4$. Le signe de f_{11} est donc constant ! $f_1(x)$ est une fonction monotone de la variable x_1 ce qui caractérise le fait que l'écoulement du temps est unidirectionnel, indépendamment des observateurs. En notant $<\vec{e}>$ le sous espace vectoriel engendré par $\vec{e}$, on obtient les sous espaces propres associés

$$\begin{aligned} V(\lambda_1) &= \left\{(0,h_2,h_3,h_4) \in \mathbb{R}^4,\ \sum_{k=2}^{4} h_i f_{1i} = 0\right\} \\ V(\lambda_2) &= <(\sqrt{f_{11}^2-\mu}, -\varepsilon f_{12}, -\varepsilon f_{13}, -\varepsilon f_{14})> \\ V(\lambda_3) &= <(\sqrt{f_{11}^2-\mu}, \varepsilon f_{12}, \varepsilon f_{13}, \varepsilon f_{14})> \end{aligned}$$

En effet, soit $h = (0, h_2, h_3, h_4)^t$, $\sum_{k=2}^{4} h_i f_{1i} = 0$. Alors,

$$F^t F h = \begin{pmatrix} 2f_{11}^2 - \mu & 2f_{11}f_{12} & 2f_{11}f_{13} & 2f_{11}f_{14} \\ 2f_{12}f_{11} & 2f_{12}^2 + \mu & 2f_{12}f_{13} & 2f_{12}f_{14} \\ 2f_{13}f_{11} & 2f_{13}f_{12} & 2f_{13}^2 + \mu & 2f_{13}f_{14} \\ 2f_{14}f_{11} & 2f_{14}f_{12} & 2f_{14}f_{13} & 2f_{14}^2 + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} F^t F \begin{pmatrix} \sqrt{f_{11}^2 - \mu} \\ \varepsilon f_{12} \\ \varepsilon f_{13} \\ \varepsilon f_{14} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{f_{11}^2 - \mu}(2f_{11}^2 - \mu) + 2\varepsilon f_{11}(\sum_{k=2}^{4} f_{1k}^2) \\ 2f_{11}f_{12}\sqrt{f_{11}^2 - \mu} + \varepsilon f_{12}\mu + 2\varepsilon f_{12}(\sum_{k=2}^{4} f_{1k}^2) \\ 2f_{11}f_{13}\sqrt{f_{11}^2 - \mu} + \varepsilon f_{13}\mu + 2\varepsilon f_{13}(\sum_{k=2}^{4} f_{1k}^2) \\ 2f_{11}f_{14}\sqrt{f_{11}^2 - \mu} + \varepsilon f_{14}\mu + 2\varepsilon f_{14}(\sum_{k=2}^{4} f_{1k}^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{f_{11}^2 - \mu}(2f_{11}^2 - \mu) + 2\varepsilon f_{11}(f_{11}^2 - \mu) \\ 2f_{11}f_{12}\sqrt{f_{11}^2 - \mu} + \varepsilon f_{12}\mu + 2\varepsilon f_{12}(f_{11}^2 - \mu) \\ 2f_{11}f_{13}\sqrt{f_{11}^2 - \mu} + \varepsilon f_{13}\mu + 2\varepsilon f_{13}(f_{11}^2 - \mu) \\ 2f_{11}f_{14}\sqrt{f_{11}^2 - \mu} + \varepsilon f_{14}\mu + 2\varepsilon f_{14}(f_{11}^2 - \mu) \end{pmatrix} \\ &= \left\{ (2f_{11}^2 - \mu) + 2|f_{11}|\sqrt{f_{11}^2 - \mu} \right\} \begin{pmatrix} \sqrt{f_{11}^2 - \mu} \\ \varepsilon f_{12} \\ \varepsilon f_{13} \\ \varepsilon f_{14} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proposition 2.1.1. *$\mathcal{N}$, muni de la loi de composition des applications, a une structure de groupe*

En effet, f étant une bijection et $\mu > 0$, on déduit de l'égalité $det(F^t F) = det(F)^2 = \mu^4$ que f est un difféomorphisme. Or l'ensemble des difféomorphismes infiniment différentiables, muni de la loi de composition des applications, a une structure de groupe par conséquent f^{-1} est infiniment différentiable et,d'après la définition de $\mathcal{N}$, est un de ses éléments. L'ensemble $\mathcal{N}$, qui d'après sa définition est stable pour la loi de composition des applications, a donc une structure de groupe.

Proposition 2.1.2. *Soit $f \in \mathcal{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors $\lambda f \in \mathcal{N}$*

En effet, soit $\Lambda \in \Delta$. On peut noter

$$\Lambda = \{(\alpha, u_2(\alpha), u_3(\alpha), u_4(\alpha)), \alpha \in \mathbb{R}\} \ , \ (\frac{du_2}{d\alpha})^2 + (\frac{du_3}{d\alpha})^2 + (\frac{du_4}{d\alpha})^2 = 1$$

Si $\Lambda' = f(\Lambda)$, on peut noter

$$\Lambda' = \{(\alpha, u_2'(\alpha), u_3'(\alpha), u_4'(\alpha)), \alpha \in \mathbb{R}\} \ , \ (\frac{du_2'}{d\alpha})^2 + (\frac{du_3'}{d\alpha})^2 + (\frac{du_4'}{d\alpha})^2 = 1$$

On a alors $\lambda f(\Lambda) = \lambda\Lambda'$ et en notant $u^i(\lambda\alpha) = \lambda u_i'(\alpha)$, on peut écrire

$$\lambda\Lambda' = \left\{(\lambda\alpha, \lambda u^2(\alpha), \lambda u^3(\alpha), \lambda u^4(\alpha)), \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(\eta, u^2(\eta), u^3(\eta), u^4(\eta)), \eta \in \mathbb{R}\right\}$$

En posant $\eta = \lambda\alpha$, il vient

$$\frac{du^i}{d\eta} = \frac{1}{\lambda}\frac{du^i}{d\alpha} = \frac{du_i'}{d\alpha}$$

on a donc la relation

$$(\frac{du^2}{d\eta})^2 + (\frac{du^3}{d\eta})^2 + (\frac{du^4}{d\eta})^2 = 1$$

On déduit de 2.4 et de 2.2 l'équation

$$F^tF = (f_{11}^2 - f_{12}^2 - f_{13}^2 - f_{14}^2)J + 2(f_{1i}f_{1j})_{ij}$$

.

Définition 2.1.1. *On appelle fonction génératrice de la transformation admissible $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la fonction réelle f_1*

2.2 Equations caractéristiques de $\mathcal{N}$

Proposition 2.2.1. *$\forall x \in \mathbb{R}^4$, le système de vecteurs $(p_2(x), p_3(x), p_4(x))$ forme une base de de $\mathbb{R}^4$*

En effet, soit $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^4$ et soit $x \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\sum_{i=2}^{4} \alpha_i(x)p_i(x) = 0$$

On peut alors écrire

$$p_j^t(\sum_{i=2}^{4} \alpha_i p_i) = \sum_{i=2}^{4} \alpha_i(p_j^t p_i) = 0$$

Le calcul direct du déterminant de la matrice d'ordre 3 $(p_j^t p_i)_{ij}$ issue de ce système donne, en considérant les équations

$$p_i^t p_i = f_{1i}^2 + \mu \ \ (i \neq 1),\ p_i^t p_j = f_{1i}f_{1j} \ \ (i \neq j) \tag{2.5}$$

$$(p_j^t p_i)_{ij} = \begin{pmatrix} f_{12}^2 + \mu & f_{12}f_{13} & f_{12}f_{14} \\ f_{12}f_{13} & f_{13}^2 + \mu & f_{13}f_{14} \\ f_{14}f_{12} & f_{14}f_{13} & f_{14}^2 + \mu \end{pmatrix}$$

la valeur $\mu^2 f_{11}^2$ qui est non nul en tout point par conséquent, $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 0, 0)$ d'où le résultat.
Par un calcul direct, on obtient que cette, a pour inverse

$$D = \frac{1}{\mu} I_3 - \frac{1}{\mu f_{11}^2}(f_{1i}f_{1j})_{ij}$$

I_3 étant étant la matrice identité de $\mathbb{R}^3$. Cherchons $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tels que

$$p_1 = \sum_{i=2}^{4} \alpha_i p_i$$

On a alors à résoudre le système

$$p_j^t p_1 = \sum_{i=2}^{4} \alpha_i(p_j^t p_i)$$

la solution est donné par

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix} = D\begin{pmatrix}p_1^t p_2\\ p_1^t p_3\\ p_1^t p_4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix} = \frac{1}{\mu f_{11}^2}\begin{pmatrix}f_{11}^2-f_{12}^2 & -f_{12}f_{13} & -f_{12}f_{14}\\ -f_{12}f_{13} & f_{11}^2-f_{13}^2 & -f_{13}f_{14}\\ -f_{14}f_{12} & -f_{14}f_{13} & f_{11}^2-f_{14}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{11}f_{12}\\ f_{11}f_{13}\\ f_{11}f_{14}\end{pmatrix}$$

On trouve

$$p_1 = \sum_{k=2}^{4}\frac{f_{1k}}{f_{11}}p_k \tag{2.6}$$

D'autre part, en notant

$$p_{ji} = p_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_{2i}}{\partial x_j} & \frac{\partial f_{3i}}{\partial x_j} & \frac{\partial f_{4i}}{\partial x_j}\end{pmatrix}^t$$

On a les égalités

$$\frac{\partial(p_i^t p_j)}{\partial x_k} = p_i^t\frac{\partial p_j}{\partial x_k} + p_j^t\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = p_i^t p_{jk} + p_j^t p_{ik}$$

On déduit alors de 2.5

$$(i)\quad p_i^t p_i = f_{1i}^2+\mu \Rightarrow p_i^t p_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(f_{1i}^2+\mu),\ i,j\in\{2,3,4\}$$

$$\begin{aligned}(ii)\quad p_i^t p_j = f_{1i}f_{1i} \quad &\Rightarrow \quad p_i^t p_{ij} + p_j^t p_{ii} = \frac{\partial}{\partial x_i}(f_{1i}f_{1j})\\ &\Rightarrow \quad p_j^t p_{ii} = \frac{\partial}{\partial x_i}(f_{1i}f_{1j}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(f_{1i}^2+\mu),\quad i\neq j\end{aligned}$$

$$(iii)\quad p_i^t p_j = f_{1i}f_{1i} \quad \Rightarrow \quad p_i^t p_{jk} + p_j^t p_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k}(f_{1i}f_{1j}),\quad i\neq j\neq k$$

Le (iii) définit, pour $i,j,k\in\{2,3,4\}$, un système de trois équations à trois inconnues. Il est facilement inversible et on obtient

$$(iii)\quad p_i^t p_j = f_{1i}f_{1i} \quad \Rightarrow \quad p_i^t p_{jk} = f_{1i}\frac{\partial f_{1j}}{\partial x_k},\quad i\neq j\neq k$$

Pour $i,j\in\{2,3,4\}$, d'après la proposition 2.2.1, on peut chercher $\alpha_2^{ij},\alpha_3^{ij},\alpha_4^{ij}$ tels que

$$p_{ij} = \sum_{k=2}^{4}\alpha_k^{ij}p_k$$

La solution de ce système linéaire est donné par

$$\begin{pmatrix}\alpha_2^{ij}\\ \alpha_3^{ij}\\ \alpha_4^{ij}\end{pmatrix} = D\begin{pmatrix}p_2^t p_{ij}\\ p_3^t p_{ij}\\ p_4^t p_{ij}\end{pmatrix}$$

Les fonctions $\alpha_2^{ij}, \alpha_3^{ij}, \alpha_4^{ij}$ ainsi définies, en considérant $(i), (ii), (iii)$, dépendent uniquement des applications f_{1i} qui représentent le gradient de la fonction génératrice de la transformation f. En identifiant les coordonnées d'une égalité vectorielle, on a

$$p_{ij} = \sum_{i=2}^{4} \alpha_k^{ij} p_k \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_{pi}}{\partial x_j} = \sum_{i=2}^{4} \alpha_k^{ij} f_{pk} \quad i, j, k, p \in \{2, 3, 4\}$$

On peut mettre ces équations sous la forme

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_{i2}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_{i3}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_{i4}}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} = A_j \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix}, \; A_j = \begin{pmatrix} \alpha_2^{2j} & \alpha_3^{2j} & \alpha_4^{2j} \\ \alpha_2^{3j} & \alpha_3^{3j} & \alpha_4^{4j} \\ \alpha_2^{4j} & \alpha_3^{4j} & \alpha_4^{4j} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Des égalités

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix}$$

Il vient

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ A_j \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ A_k \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} \right\}$$

On obtient

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} A_j \right\} \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} + A_j A_k \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} A_k \right\} \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} + A_k A_j \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix}$$

On peut écrire

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} A_j + A_j A_k \right\} \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} A_k + A_k A_j \right\} \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix}$$

Or la matrice carrée d'ordre trois ayant pour vecteurs colonnes $q_i = (\begin{pmatrix} f_{i2} & f_{i3} & f_{i4} \end{pmatrix})^t$, $i \in 2, 3, 4$, est la transposée de celle ayant pour vecteurs collones p_i. D'après la proposition 2.2.1, le déterminant de cette dernière est non nul en tout point par conséquent, les $q_i(x)$ sont linéairements indépendants $\forall x \in \mathbb{R}^4$. On peut alors déduire de l'quation ci-dessus la relation

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} A_j + A_j A_k \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} A_k + A_k A_j \right\}, \quad i, j \in \{2, 3, 4\} \tag{2.8}$$

Ce sont des équations de compatibilités auquelles on associe la condition 2.4

$$f_{11}^2 - f_{12}^2 - f_{13}^2 - f_{14}^2 > 0$$

L'unique inconnue de ces équations est la fonction génératrice de la transformation recherhée. Si on suppose cette fonction génératrice connue, ∇f_i est alors déterminé, d'après 2.6 et 2.7, par les équations

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} = A_j \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix}, \; f_{i1} = \sum_{k=2}^{4} \frac{f_{1k}}{f_{11}} f_{ik}, \quad i \in \{2, 3, 4\} \tag{2.9}$$

auxquelles on associe 2.5

$$\sum_{k=2}^{4} {f_{ki}}^2 = f_{1i}^2 + \mu,\ \sum_{k=2}^{4} f_{ki} f_{kj} = f_{1i} f_{1j},\ \ i,j \in \{2,3,4\},\ i \neq j \tag{2.10}$$

2.3 Notion de référentiel

Définition 2.3.1. *On appelle espace-temps d'un observateur S le sous ensemble de $\mathcal{E}(S)$ de Θ défini par*

$$\mathcal{E}(S) = \{foS\,,\ f \in \mathcal{N}\}$$

On a défini une partition sur Θ. En effet, $\forall S' \in \mathcal{E}(S)$, $\exists f \in \mathcal{N}$ tel que $S' = foS$ et par suite, $S = f^{-1}oS'$ donc $S \in \mathcal{E}(S')$. La partition sur Θ est définie par la relation d'équivalence

$$S' \approx S \Leftrightarrow S' \in \mathcal{E}(S)$$

Les classes d'équivalence seront appelées espace-temps par définition.

Définition 2.3.2. *Soit $f \in \mathcal{N}$. On dit que f est interne si, F étant sa matrice différentielle, il existe un réel λ tel que $F^tF = \lambda I_4$*

Proposition 2.3.1. *L'ensemble des transformations internes est un sous groupe de $\mathcal{N}$*

En effet, si $F^tF = \lambda I_4$, alors $(F^{-1})^t(F^tF)F^{-1} = \lambda(F^{-1})^t(F^{-1})$, donc $(F^{-1})^t(F^{-1}) = \frac{1}{\lambda} I_4$ et f^{-1} est interne. Si g est interne, alors FG est la matrice différentielle de fog et on a $(FG)^t(FG) = G^t(F^tF)G = \lambda_f G^tG = \lambda_f \lambda_g I_4$ et donc fog est interne.

Définition 2.3.3. *On appelle référentiels les classes d'équivalence de la relation $\sim$ définie sur Θ par $S \sim S' \ \Leftrightarrow\ S'oS^{-1}$ est interne.*

On définit de façon analogue une relation d'équivalence sur $\mathcal{N}$, qu'on note par abus $\sim$, par $f \sim g \ \Leftrightarrow fog^{-1}$ est interne. Ainsi, $f \sim g$ si et seulement si pour tout observateur S, foS et goS appartiennent au même référentiel. On dira que f et g sont équivalentes.

Proposition 2.3.2. *Soient $f, g \in \mathcal{N}$. $f \sim g$ si et seulement s'il existe un réel non nul λ et un réel η tels que $f_1 = \lambda g_1 + \eta$*

En effet, si $f_1 = \lambda g_1 + \eta$, alors $f_{1i} = \lambda g_{1i},\ i = 1,2,3,4$. Il résulte de 2.2 et 2.4 que $F^tF = \lambda^2 G^tG$. Alors $(FG^{-1})^t(FG^{-1}) = (G^{-1})^t(F^tF)(G^{-1}) = \lambda^2 I_4$ par conséquent, fog^{-1}, dont la matrice différentielle est FG^{-1}, est interne. Réciproquement, si $(FG^{-1})^t(FG^{-1}) = \lambda^2 I_4$, alors $(G^{-1})^t(F^tF)(G^{-1}) = \lambda^2 I_4$ par conséquent $F^tF = \lambda^2 G^tG$. Notons $F^tF(i,j)$ l'élément d'indice (i,j) de la matrice F^tF. Alors On a

$$F^tF(1,1) - \sum_{k=2}^{4} F^tF(1,k) = \lambda^2 \left\{ G^tG(1,1) - \sum_{k=2}^{4} G^tG(1,k) \right\}$$

En considérant 2.2 et 2.4, on obtient

$$\begin{aligned} F^tF(1,1) - \sum_{k=2}^{4} F^tF(1,k) &= \left\{(2f_{11}^2 - \mu_f) - (2f_{12}^2 + \mu_f) - (2f_{13}^2 + \mu_f) - (2f_{14}^2 + \mu_f)\right\} \\ &= (2\mu_f - \mu_f - 3\mu_f) \\ &= -2\mu_f \\ &= -2(f_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{1k}^2) \end{aligned}$$

On peut écrire

$$f_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{1k}^2 = \lambda^2 \left\{ g_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} g_{1k}^2 \right\}$$

En subtituant cette relation dans 2.2, il vient

$$(f_{1i}f_{1j})_{ij} = \lambda^2 (g_{1i}g_{1j})_{ij}$$

Sachant que f_{11} et g_{11} sont non nuls en tout point, on obtient pour $j = 1$,

$$\frac{f_{1i}}{g_{11}} = \lambda^2 \frac{g_{1i}}{f_{11}}$$

Pour $i = 1$, il vient $f_{11} = \varepsilon\lambda g_{11}$ donc, $f_{1i} = \varepsilon\lambda g_{1i}$, $\varepsilon = \pm 1$ d'où $\nabla f_1 = \varepsilon\lambda\nabla g_1$.

Proposition 2.3.3. *Si $f \in \mathcal{N}$ est une transformation interne de matrice différentielle F, alors il existe un réel λ et une matrice scalaire orthogonale d'ordre trois M tels que*

$$F = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

En effet,il résulte de 2.2 et 2.4

$$F^tF(1,1) - \sum_{k=2}^{4} F^tF(1,k) = -2(f_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{1k}^2)$$

Par ailleurs, il résulte de la proposition 2.3.2 que $F^tF = \lambda^2 I_4$,

$$F^tF(1,1) - \sum_{k=2}^{4} F^tF(1,k) = -2\lambda^2$$

On a alors

$$f_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{1k}^2 = \lambda^2$$

on peut écrire

$$F^tF = \lambda^2 J + 2(f_{1i}f_{1j})_{ij} = \lambda^2 I_4$$

On en déduit les équations

$$2f_{11}^2 - \lambda^2 = \lambda^2,\ 2f_{1i}^2 + \lambda^2 = \lambda^2\ (i \neq 1),\ 2(f_{1i}f_{1j}) = 0\ (i \neq j)$$

Il vient les relations

$$f_{11}^2(x) = \lambda^2,\ f_{1i}(x) = 0,\quad \forall x \in \mathbb{R}^4, i \in \{2,3,4\}$$

On déduit alors de (i), (ii) et (iii) que $p_i^t p_{jk} = 0$, $i,j,k \in \{2,3,4\}$ donc $A_i = 0$. Il résulte de 2.9 que $f_{i1} = 0$, $f_{ij} = f_{ij}(x_1)$. On a les égalités

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_j} = \frac{\partial f_{i1}}{\partial x_j} = 0$$

On déduit que $f_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j \in \{2,3,4\}$. On peut alors mettre 2.5 se met sous la forme

$$\begin{pmatrix} f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{pmatrix} = \lambda^2 I_3$$

En posant

$$M = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{pmatrix}$$

On obtient

$$F = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\ ,\quad M^t M = I_3$$

L'intégration de cette matrice donne

$$f_1(x) = \lambda x_1 + \alpha_1,\ \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}(x) = \lambda M \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}\ ,\ \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Soit π_i l'application définie sur $\mathbb{R}^4$ par $\pi_i(x) = x_i$. On note

$$\pi_t = \pi_1,\ \pi_p = (\pi_2, \pi_3, \pi_4)$$

Définition 2.3.4. *$\pi_t(S)$ est appelée coordonnée temporelle de l'observateur S et $\pi_p(S)$ est appelée coordonnées spatiales.*

Si les observateurs S et S' appartiennent au même référentiel, alors $S'oS^{-1}$ est interne et on a

$$\pi_t(S') = \lambda \pi_t(S) + \alpha_1,\ \pi_p(S') = \lambda \pi_p(S) M^t + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}\ , \alpha_i \in \mathbb{R},\ M^t M = I_3$$

Ceci prouve que dans un référentiel, à une transformation affine près, la coordonnée temporelle est indépendante des observateurs et indépendante des coordonnées spatiales : on dira que le temps est orthogonale à l'espace. Du fait de l'orthogonalité de la matrice scalaire M, on dira que dans un référentiel, les coordonnées spatiales sont orthogonales entre elles.

2.4 Matrice différentielle d'une transformation admissible

Soit $f \in \mathcal{N}$. Elle est déterminée par l'équation 2.2 à partir de laquelle on a obtenue 2.9 et 2.8. F est donc déterminé par, $i \in \{2,3,4\},\ i \neq j$,

$$\sum_{k=2}^{4} {f_{ki}}^2 = f_{1i}^2 + \mu,\ \sum_{k=2}^{4} f_{ki} f_{kj} = f_{1i} f_{1j},\ f_{i1} = \sum_{k=2}^{4} \frac{f_{1k}}{f_{11}} f_{ik},\ \mu = f_{11}^2 - f_{12}^2 - f_{13}^2 - f_{14}^2 > 0$$

Supposons $f_{11} > 0$. On vérifie que le système

$$f_{ii} = \frac{\mu + f_{11}\sqrt{\mu} + f_{1i}^2}{f_{11} + \sqrt{\mu}} = \sqrt{\mu} + \frac{f_{1i}^2}{f_{11} + \sqrt{\mu}},\ f_{ij} = \frac{f_{1i} f_{1j}}{f_{11} + \sqrt{\mu}},\ f_{i1} = f_{1i}$$

définit une solution. En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{4} {f_{k2}}^2 &= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{(\mu + f_{11}\sqrt{\mu} + f_{12}^2)^2 + (f_{12}f_{13})^2 + (f_{12}f_{14})^2\right\} \\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{\mu^2 + f_{11}^2\mu + f_{12}^4 + 2f_{11}\mu\sqrt{\mu} + 2f_{11}f_{12}^2\sqrt{\mu} + 2f_{12}^2\mu + f_{12}^2 f_{13}^2 + f_{12}^2 f_{14}^2\right\} \\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{f_{12}^2(f_{12}^2 + f_{13}^2 + f_{14}^2 + 2f_{11}\sqrt{\mu} + 2\mu) + f_{11}^2\mu + \mu^2 + 2f_{11}\mu\sqrt{\mu}\right\} \\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{f_{12}^2(f_{11}^2 - \mu + 2f_{11}\sqrt{\mu} + 2\mu) + \mu(f_{11}^2 + \mu + 2f_{11}\sqrt{\mu}\right\} \\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{f_{12}^2(f_{11}+\sqrt{\mu})^2 + \mu(f_{11}+\sqrt{\mu})^2\right\} \\
&= f_{12}^2 + \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{4} f_{k2} f_{k3} &= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{(\mu + f_{11}\sqrt{\mu} + f_{12}^2)(f_{12}f_{13}) + (\mu + f_{11}\sqrt{\mu} + f_{13}^2)(f_{12}f_{13}) + f_{12}f_{13}^2 f_{14}^4\right\} \\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{2\mu + 2f_{11}\sqrt{\mu} + f_{12}^2 + f_{13}^2 + f_{14}^2\right\} f_{12}f_{13} \\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{2\mu + 2f_{11}\sqrt{\mu} + f_{11}^2 - \mu\right\} f_{12}f_{13} \\
&= f_{12}f_{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21} &= \frac{1}{f_{11}+\sqrt{\mu}}\left\{\frac{f_{12}}{f_{11}}(\mu + f_{11}\sqrt{\mu} + f_{12}^2) + \frac{f_{13}}{f_{11}}(f_{12}f_{13}) + \frac{f_{13}}{f_{11}}(f_{12}f_{14})\right\} \\
&= \frac{f_{12}}{f_{11}(f_{11}+\sqrt{\mu})}\left\{\mu + f_{11}\sqrt{\mu} + f_{12}^2 + f_{13}^2 + f_{14}^2\right\} \\
&= \frac{f_{12}}{f_{11}(f_{11}+\sqrt{\mu})}\left\{\mu + f_{11}\sqrt{\mu} + f_{11}^2 - \mu\right\} \\
&= f_{12}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, il résulte de 2.3.2 que g étant une transformation admissible telle que $g_1 = \pm f_1$, fog^{-1} est interne et il existe une matrice scalaire orthogonale M

telle que sa matrice différentielle, FG^{-1}, soit donnée par

$$FG^{-1} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

On obtient

$$F = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix} G$$

et nécessairement, puisque $g_1 = \pm f_1$, $\lambda = \pm 1$. En conclusion, quelque soit le signe de f_{11}, il existe une matrice scalaire orthogonale M telle que, $\varepsilon = \frac{f_{11}}{|f_{11}|}$,

$$\varepsilon F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon f_{11} & \varepsilon f_{12} & \varepsilon f_{13} & \varepsilon f_{14} \\ \varepsilon f_{12} & \sqrt{\mu} + \frac{f_{12}^2}{\varepsilon f_{11} + \sqrt{\mu}} & \frac{f_{12} f_{13}}{\varepsilon f_{11} + \sqrt{\mu}} & \frac{f_{12} f_{14}}{\varepsilon f_{11} + \sqrt{\mu}} \\ \varepsilon f_{13} & \frac{f_{12} f_{13}}{\varepsilon f_{11} + \sqrt{\mu}} & \sqrt{\mu} + \frac{f_{13}^2}{\varepsilon f_{11} + \sqrt{\mu}} & \frac{f_{13} f_{14}}{\varepsilon f_{11} + \sqrt{\mu}} \\ \varepsilon f_{14} & \frac{f_{12} f_{14}}{\varepsilon f_{11} + \sqrt{\mu}} & \frac{f_{13} f_{14}}{\varepsilon f_{11} + \sqrt{\mu}} & \sqrt{\mu} + \frac{f_{14}^2}{\varepsilon f_{11} + \sqrt{\mu}} \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{12} & \varepsilon\sqrt{\mu} + \frac{f_{12}^2}{f_{11} + \varepsilon\sqrt{\mu}} & \frac{f_{12} f_{13}}{f_{11} + \varepsilon\sqrt{\mu}} & \frac{f_{12} f_{14}}{f_{11} + \varepsilon\sqrt{\mu}} \\ f_{13} & \frac{f_{12} f_{13}}{f_{11} + \epsilon\sqrt{\mu}} & \varepsilon\sqrt{\mu} + \frac{f_{13}^2}{f_{11} + \varepsilon\sqrt{\mu}} & \frac{f_{13} f_{14}}{f_{11} + \varepsilon\sqrt{\mu}} \\ f_{14} & \frac{f_{12} f_{14}}{f_{11} + \varepsilon\sqrt{\mu}} & \frac{f_{13} f_{14}}{f_{11} + \varepsilon\sqrt{\mu}} & \varepsilon\sqrt{\mu} + \frac{f_{14}^2}{f_{11} + \varepsilon\sqrt{\mu}} \end{pmatrix}$$

2.5 Le groupe de Lorentz-Poincaré

Définition 2.5.1. *On note LP le sous ensemble de $\mathcal{N}$ formé des transformations dont la fonction génératrice est affine*

f étant une telle transformation, il résulte de (i),(ii) et (iii) les égalités $p_i^t p_{kj} = 0$, $i, j, k \in \{2, 3, 4\}$ par conséquent, $A_i = 0$. Il résulte de 2.9 que

$$f_{ij} = f_{ij}(x_1) \; i, j \in \{2, 3, 4\}$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_1} = \frac{\partial f_{i1}}{\partial x_j} = \sum_{k=2}^{4} \frac{f_{1k}}{f_{11}} \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_j} = 0$$

Il vient que $f_{ij} \in \mathbb{R}$ pour $i, j \in \{2, 3, 4\}$ et par suite, $f_{i1} \in \mathbb{R}$. Alors la matrice différentielle F est à coefficients constants. Si $f_{11} > 0$, on a une solution

$$f_{ii} = \sqrt{\mu} + \frac{f_{1i}^2}{f_{11} + \sqrt{\mu}}, \; f_{ij} = \frac{f_{1i} f_{1j}}{f_{11} + \sqrt{\mu}}, \; f_{i1} = f_{1i}, \; \mu = f_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{1k}^2$$

Effectuons le changement de variable

$$\alpha = \sqrt{f_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{1k}^2}, \; \beta_i = \frac{f_{1i}}{f_{11}} \; (i \in \{2, 3, 4\}), \; \beta^2 = \sum_{i=2}^{4} \beta_k^2, \; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \; \varepsilon = \frac{f_{11}}{|f_{11}|}$$

On obtient

$$1-\beta^2 = 1-\sum_{k=2}^{4}\frac{f_{1k}^2}{f_{11}^2} = \frac{1}{f_{11}^2}(f_{11}^2-\sum_{k=2}^{4}f_{1k}^2) = \frac{1}{f_{11}^2}\mu,\ \gamma = \frac{|f_{11}|}{\sqrt{\mu}} = \frac{|f_{11}|}{\alpha}$$

$$f_{11} = \varepsilon|f_{11}| = \varepsilon\alpha\gamma,\ f_{1i} = f_{11}\frac{f_{i1}}{f_{11}} = \varepsilon\alpha\gamma\beta_i$$

$$f_{ii} = \alpha + \frac{\alpha^2\gamma^2\beta_i^2}{\varepsilon\alpha\gamma+\alpha} = \varepsilon\alpha\{\varepsilon + \frac{\gamma^2\beta_i^2}{\gamma+\varepsilon}\},\ i\neq 1$$

$$f_{ij} = \frac{(\varepsilon\alpha\gamma\beta_i)(\varepsilon\alpha\gamma\beta_j)}{\varepsilon\alpha\gamma+\alpha},\ = \varepsilon\alpha\frac{\gamma^2\beta_i\beta_j}{\gamma+\varepsilon}$$

Il résulte

$$F = \varepsilon\alpha\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&&&\\0&&M&\\0&&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 & \gamma\beta_4\\ \gamma\beta_2 & \varepsilon+\frac{\gamma^2\beta_2^2}{\gamma+\varepsilon} & \frac{\gamma^2\beta_2\beta_3}{\gamma+\varepsilon} & \frac{\gamma^2\beta_2\beta_4}{\gamma+\varepsilon}\\ \gamma\beta_3 & \frac{\gamma^2\beta_2\beta_3}{\gamma+\varepsilon} & \varepsilon+\frac{\gamma^2\beta_3^2}{\gamma+\varepsilon} & \frac{\gamma^2\beta_3\beta_4}{\gamma+\varepsilon}\\ \gamma\beta_4 & \frac{\gamma^2\beta_2\beta_4}{\gamma+\varepsilon} & \frac{\gamma^2\beta_3\beta_4}{\gamma+\varepsilon} & \varepsilon+\frac{\gamma^2\beta_4^2}{\gamma+\varepsilon}\end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de F^tF sont

$$\lambda_1 = \alpha^2\ ,\ \lambda_2 = \alpha^2\frac{1-\sqrt{\beta^2}}{1+\sqrt{\beta^2}},\ \lambda_3 = \alpha^2\frac{1+\sqrt{\beta^2}}{1-\sqrt{\beta^2}}$$

Définition 2.5.2. *Soient deux observateurs S et S' tels que $S'oS^{-1}\in LP$. On dira que le mouvement relatif de S et S' est uniforme*

Proposition 2.5.1. *LP est un sous groupe de $\mathcal{N}$*

En effet, Il résulte de ce qui précède que LP est le sous ensemble de $\mathcal{N}$ formé des transformations dont la matrice différentielle est à coefficients constants. Or le produit de deux matrices à coefficients constants est à coefficients constants, et il en est de même pour l'inverse d'une matrice. le résultat découle du fait que la matrice différentielle de fog est FG et celle de f^{-1} est F^{-1}. Explicitons une transformation particulière de LP. Pour $\beta_3=\beta_4=0$, $M=I_3$, $\varepsilon=1$, on obtient

$$F = \alpha\begin{pmatrix}\gamma & \gamma\beta & 0 & 0\\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Après intégration, on obtient

$x_1' = \alpha(\gamma x_1+\gamma\beta_2 x_2)+\alpha_1,\ x_2' = \alpha(\gamma\beta_2 x_1+\gamma x_2)+\alpha_2,\ x_3' = \alpha x_3+\alpha_3,\ x_4' = \alpha x_4+\alpha_4$

Je rappelle que nous devons, pour chaque transformation admissible, nommer sous forme de définition l'état relatif qu'elle décrit (entre deux observateurs dont elle serait la transformation associée). Ainsi, on a définit l'état uniforme comme étant celui pour lequel la fonction génératrice de la transformation est affine. Intuitivement, l'étude des états de translation peut être restreinte à ceux qui ont lieu suivant l'une des dimensions spatiales. Soit $f = S'oS^{-1}$ décrivant une translation rectiligne. On peut supposer qu'il existe S" dans le référentiel de S' tel que, si $g = S"oS'^{-1}$, alors $G = G(x_1, x_i),\ i\in\{2,3,4\}$. Sachant que $g = hof$, h interne, il résulte de la proposition 2.3.3 que $F = F(x_1, x_i)$.

Définition 2.5.3. *On appelle ensemble des transformations rectilignes, qu'on note T, le plus petit sous groupe de $\mathcal{N}$ contenant les transformations f telles que $f_1 = f_1(x_1, x_i),\ i \in \{2,3,4\}$*

Proposition 2.5.2. *T est identique au groupe de Lorentz*

Soit $f \in \mathcal{N}$ telle que $f_1 = f_1(x_1, x_2)$. Alors

$$f_{11} = f_{11}(x_1, x_2),\ f_{12} = f_{12}(x_1, x_2),\ f_{13} = 0,\ f_{14} = 0$$

En reprenant les notations de la section 2.2, on pose

$$p^{ij} = \begin{pmatrix} p_2^t p_{ij} \\ p_3^t p_{ij} \\ p_4^t p_{ij} \end{pmatrix},\ i,j \in \{2,3,4\}$$

Il résulte alors de (i), (ii) et (iii) les égalités

$$p^{22} = \begin{pmatrix} f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ p^{33} = p^{44} = \begin{pmatrix} f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} - f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ p^{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} - f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p^{24} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} - f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} \end{pmatrix},\ p^{34} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ D = \frac{1}{f_{11}^2 - f_{12}^2}\begin{pmatrix} 1 - \frac{f_{12}^2}{f_{11}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant $\alpha^{ij} = (\alpha_2^{ij}, \alpha_3^{ij}, \alpha_4^{ij})^t$, il résulte de $\alpha^{ij} = Dp^{ij}$ les égalités

$$\alpha^{22} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f_{11}}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha^{33} = \alpha^{44} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f_{11}^2}(f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} - f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha^{34} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{f_{11}^2 - f_{12}^2}(f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} - f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2}) \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha^{24} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{f_{11}^2 - f_{12}^2}(f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} - f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2}) \end{pmatrix}$$

On obtient alors

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{f_{11}}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f_{11}^2 - f_{12}^2}(f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} - f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_{11}^2 - f_{12}^2}(f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} - f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2}) \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{f_{11}^2 - f_{12}^2}(f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} - f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2}) & 0 \\ \frac{1}{f_{11}^2}(f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} - f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{f_{11}^2 - f_{12}^2}(f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} - f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2}) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f_{11}^2}(f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} - f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2}) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\frac{\partial}{\partial x_4}A_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}A_4 = 0$ et

$$A_3A_4 - A_4A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_{11}^2(f_{11}^2-f_{12}^2)}(f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} - f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2})^2 \\ 0 & \frac{1}{f_{11}^2(f_{11}^2-f_{12}^2)}(f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} - f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2})^2 & 0 \end{pmatrix}$$

On déduit de 2.8 la relation

$$f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} - f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} = 0$$

cette égalité annulant les matrices A_3 et A_4, c'est la seule qu'on peut déduire de 2.8. Sachant que $\mu = f_{11}^2 - f_{12}^2$, nous avons à résoudre le système

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(f_{11}^2 - f_{12}^2) = 0,\ f_{11}^2 - f_{12}^2 = C^2 > 0$$

avec $C = C(x_1)$. Il résulte de 2.9, $i \neq 1$,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} = 0,\ j \in \{3,4\},\ \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f_{11}}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix},\ f_{i1} = \frac{f_{12}}{f_{11}}f_{i2}$$

Il vient, $i \neq 1$,

$$f_{ik} = f_{ik}(x_1),\ k \in \{3,4\},\ f_{i2} = f_{i2}(x_1,x_2),\ \frac{\partial f_{i2}}{\partial x_2} = \frac{1}{f_{11}}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2}f_{i2},\ f_{i1} = \frac{f_{12}}{f_{11}}f_{i2}$$

On a alors $f_{i1} = f_{i1}(x_1,x_2)$ et de la relation

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_k} = \frac{\partial f_{i1}}{\partial x_k} = 0,\ k \in \{3,4\}$$

on déduit que $f_{ik} \in \mathbb{R}$, $i \neq 1$, $k \in \{3,4\}$. Par ailleurs,

$$\frac{\partial f_{i2}}{\partial x_2} = \frac{1}{f_{11}}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2}f_{i2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_2}ln(f_{i2}) = \frac{\partial}{\partial x_2}ln(f_{11})$$

alors il existe des fonctions $u_i = u_i(x_1)$ telles que $f_{i2} = u_i f_{11}$ et par suite, $f_{i1} = u_i f_{12}$. De l'égalité

$$\frac{\partial f_{i2}}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial f_{i1}}{\partial x_2}$$

on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(u_i f_{11}) = \frac{\partial}{\partial x_2}(u_i f_{12}),\ \frac{du_i}{dx_1}f_{11} + u_i\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} = u_i\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2},\ \frac{1}{u_i}\frac{du_i}{dx_1} = \frac{1}{f_{11}}(\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1})$$

$$u_i(x_1) = u_i(0)\exp(\int_0^{x_1} v(s)ds),\ v = \frac{1}{f_{11}}(\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1})$$

Posons $\zeta(x_1) = \exp(\int_0^{x_1} v(s)ds)$. On a alors

$$f_{i1} = u_i(0)\zeta f_{12},\ f_{i2} = u_i(0)\zeta f_{11},\ f_{ik} = f_{ik}(0),\ i \in \{2,3,4\},\ k \in \{3,4\}$$

D'après la proposition 2.3.2, étant donné f_1, f est uniquement déterminée à une transformation interne près. Il résulte alors de la proposition 2.3.3 qu'il existe une matrice scalaire orthogonale M telle que

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 & 0 \\ u_2(0)\zeta f_{12} & u_2(0)\zeta f_{11} & f_{23}(0) & f_{24}(0) \\ u_3(0)\zeta f_{12} & u_3(0)\zeta f_{11} & f_{33}(0) & f_{34}(0) \\ u_4(0)\zeta f_{12} & u_4(0)\zeta f_{11} & f_{43}(0) & f_{44}(0) \end{pmatrix}$$

Il résulte de 2.10 les relations

$$\sum_{k=2}^{4} {f_{k2}}^2 = f_{11}^2,\ \sum_{k=2}^{4} {f_{ki}}^2 = C^2\ (i=3,4),\ \sum_{k=2}^{4} f_{ki}f_{kj} = 0,\ \ i,j \in \{2,3,4\},\ i \neq j$$

On obtient alors, à partir de la matrice F ci-dessus,

$$\zeta^2 \sum_{k=2}^{4} u_k(0)^2 = 1,\ \sum_{k=2}^{4} f_{ki}(0)^2 = C^2,\ \sum_{k=2}^{4} u_k(0)f_{ki}(0) = 0\ (i=3,4),\ \sum_{k=2}^{4} f_{k3}(0)f_{k4}(0) = 0$$

Il résulte d'une part que $\zeta^2(x_1) = \zeta^2(0),\ \forall x_1 \in \mathbb{R}$ par conséquent $v = 0$. On déduit également $C \in \mathbb{R}$. D'autre part, ces équations donnent le produit scalaire euclidien entre deux vecteurs quelconques du système linéairement indépendant (d'après proposition 2.2.1)

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_2(0) \\ u_3(0) \\ u_4(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{23}(0) \\ f_{33}(0) \\ f_{34}(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{24}(0) \\ f_{34}(0) \\ f_{44}(0) \end{pmatrix} \right\}$$

Par conséquent, il existe une matrice scalaire orthogonale M' telle que

$$\begin{pmatrix} u_2(0) & f_{23}(0) & f_{24}(0) \\ u_3(0) & f_{33}(0) & f_{34}(0) \\ u_4(0) & f_{43}(0) & f_{44}(0) \end{pmatrix} = M' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

On obtient alors

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & MM' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 & 0 \\ f_{12} & f_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{f_{11}^2 - f_{12}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{f_{11}^2 - f_{12}^2} \end{pmatrix}$$

Considérons les relations $v = 0$ et $C \in \mathbb{R}$.

$$C \in \mathbb{R}\ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{11}^2 - f_{12}^2) = 0,\ \frac{\partial}{\partial x_2}(f_{11}^2 - f_{12}^2) = 0$$

$$f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} = f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_1},\ \ f_{11}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} = f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2}$$

On sait que $f_{11} \neq 0\ \ \forall f \in \mathcal{N}$. En multipliant la première équation par f_{11},

$$f_{11}^2\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} = f_{12}f_{11}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2},\ \ f_{11}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_1} = f_{12}\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2}$$

En remplaçant la deuxieume équation dans la première,

$$f_{11}^2 \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} = f_{12}^2 \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2}$$

Par ailleurs, $v = 0$ donne

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} = 0$$

On obtient alors

$$(f_{11}^2 - f_{12}^2)\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} = 0$$

On déduit les égalités, puisque $\mu = f_{11}^2 - f_{12}^2 > 0$,

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} = 0$$

la solution est donné par

$$f_1(x_1, x_2) = \alpha^{(1)} x_1 x_2 + \alpha^{(2)} x_1 + \alpha^{(3)} x_2 + \alpha^{(4)} \ , \quad \alpha^{(i)} \in \mathbb{R}$$

La condition $C \in \mathbb{R}$ impose alors $\alpha^{(1)} = 0$. La fontion génératrice f_1 est affine par conséquent, f est une transformation de Lorentz. Je ne sais démontrer la réciproque, mais je postule que c'est exacte.

2.6 Conclusion

Références